# Материялық нүктелер жүйесі. Сақталу заңдары. Импульстің және импульс моментінің сақталу заңдары.

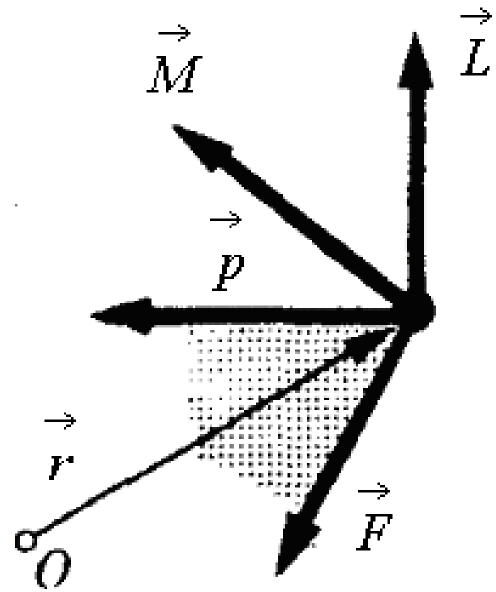
1. Материялы нүктелер жүйесі. Сыртқы және ішкі күштер
2. Материялық нүктелер жүйесінің күш моменті және импульс моменті. Материялық нүктелер жүйесіне арналған қозғалыс теңдеуі және моменттер теңдеуі
3. Механикалық жүйе массаларының центрі және оның қозғалыс заңы.
4. Сақталу заңдары
5. Импульстің сақталу заңы. Импульс моментінің сақталу заңы

**Материялық нүктелер жүйесі** деп олардың соңғы сандарының жиынтығын айтады. Жүйенің бұл нүктелерінің әрқайсысына шығу тегі екі түрлі күштер әсер етеді: біріншіден, бастау көзі жүйеден сырт жатқан күштер, олар **сыртқы күштер** деп аталады; екіншіден, **ішкі күштер** деп аталатын, жүйенің басқа нүктелері жағынан түсірілетін күштер.

О нүктесіне қарасты (6 сурет) материялық нүктеге әсер етуші күш моменті мына вектор болып табылады

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \overrightarrow{F} \qquad (41)$$

$\overrightarrow{F}$ деп материялық нүктеге әсер етуші барлық күштердің тең әсерлісін айтады. Бастапқы деп қабылданып алынған қайсыбір материялық нүктенің О нүктесіне қарасты орналасу жағдайы $\vec{r}$ радиус-векторымен сипатталады.




6 Сурет.

О нүктесіне қарасты **материялық нүктенің импульс моменті** мына вектор (6 сурет)

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P} \tag{42}$$

Уақыт бойынша (42) импульс моменті өрнегін дифференциалдау арқылы **моменттер теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{M} \qquad (43)$$

**Материялық нүктелер жүйесінің импульсі** деп жүйені құраушы материялық нүктелер импульстерінің қосындысын айтады:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P_i} = \vec{P_1} + \vec{P_2} + \ldots + \vec{P_n} \qquad (44)$$

Мұнда $\vec{P_i}$ - $i$ индексімен белгіленген материялық нүктенің импульсі*,*
*n* – жүйедегі нүктелер саны.

**Материялық нүктелер жүйесінің** бастапқы деп қабылданып алынған О нүктесіне қарасты импульс моменті деп О нүктесіне қарасты материялы нүктелер жүйесін құраушыларының импульс моменттерінің қосындысын айтады:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L_i} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{P_i} \qquad (45)$$

Мұнда $\vec{L_i} = \vec{r_i} \times \vec{P_i}$ – *i* индексімен белгіленген материялы нүкте импульсының моменті.

**Материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші** күш жүйе нүктелерінің өзара әсерлесу күштерін қоса алғанда, жүйенің нүктелеріне әсер етуші барлық күштердің қосындысы ретінде анықталады:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} \qquad (46)$$

мұнда

$$\vec{F_i} = \vec{F_i}' + \sum_{j \neq i} \vec{F_{ji}} \qquad (47)$$

жүйенің *i* индексімен белгіленген материялық нүктесіне әсер етуші күш болып табылады. Ол осы нүктеге әсер етуші $\vec{F_i}'$ сыртқы күштен, және жүйенің басқа нүктелерімен әсерлесу нәтижесінде нүктеге әсер етуші $\sum_i \vec{F_{ji}}$ ішкі күштен құралады.

Ньютонның үшінші заңы материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш үшін (46) ұйғарымын қарапайым түрге енгізуге көмектеседі:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = \sum \vec{F_i}' \qquad (48)$$

яғни, материялық нүктелер жүйесіне әсер етуші күш, жүйе нүктелеріне әсер етуші сыртқы күштердің қосындысына тең. Сондықтан, (46)-да - $\vec{F_i}$ деп тек сыртқы күштерді түсінуге болады.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M_i} = \sum_i \vec{r_i} \times \vec{F_i} \qquad (49)$$

(49)-ғы $\vec{F_i}$күші *i* нүктесіне түсірілген ішкі күштерді қоса алғандағы толық күш болып табылады:

$$\vec{F_i} = \vec{F'_i} + \sum_{j \neq i} \vec{F_{ji}}$$

мұнда $\vec{F_i}'$ – сыртқы күш, ал $\sum_{j \neq i} \vec{F_{ji}}$ – ішкі күштер.

Уақыт бойынша (44)-ті дифференциялдау арқылы **материялық нүктелер жүйесінің теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \frac{d\vec{P_i}}{dt} = \sum \vec{F_i} = \vec{F} \qquad \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad (50)$$

$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} \tag{51}$$

Мұндағы $\vec{F}$ шамасы сыртқы күштер қосындысына тең, өйткені, (51) қосындысында барлық ішкі күштер өзара қысқарады.

Уақыт бойынша (45)-ті дифференциалдасақ, **материялық нүктелер жүйесі үшін моменттер теңдеуін** аламыз:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \frac{d\vec{r_i}}{dt} \times \vec{P_i} + \sum \vec{r_i} \times \frac{d\vec{P_i}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{52}$$

Естеріңізге салайық, $\vec{M}$ – сыртқы күштер моменті.

**Массалар центрі.** Бейрелятивистік жағдайда, яғни, аз жылдамдықты қозғалыстар кезінде, массалар центрі ұғымын енгізуге болады. Ең алдымен, нүктелер жүйесінің импульсі үшін ұйғарымдарды қарастырайық:

$$\vec{P} = \sum m_{oi}\vec{V_i} = \sum m_{oi}\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum m_{oi}\vec{r_i} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum m_{oi}\vec{r_i}\right) \tag{53}$$

мұнда $m = \sum m_{oi}$ өзін құраушы нүктелердің тыныштық массасының қосындысы ретінде түсінілетін жүйе массасы.

Радиус-вектор

$$\vec{R} = \frac{1}{m}\sum m_{oi}\vec{r_i} \qquad (54)$$

**жүйе массаларының центрі** деп аталатын жорамал нүктені анықтайды.

$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$ шамасы – осы жорамал нүктенің қозғалыс жылдамдығы. Ендеше

$$\vec{P} = m\frac{d\vec{R}}{dt} = m\vec{V} \qquad (55)$$

Осы ұйғарымдарды ескерсек, қозғалыс теңдеуі мынадай түрге енеді:

$$m\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \qquad (56)$$

яғни, ол бүкіл массасы массалар центрінде шоғырланған, ал жүйенің нүктелеріне әсер етуші барлық сыртқы күштер оның массалар центріне түсірілген материялық нүкте қозғалысының теңдеуіне эквивалентті.

**Сақталу заңдары** қозғалыстың жалпы қасиеттерін теңдеулерді шешпей-ақ, және уақыт аралығындағы үрдістердің дамуы туралы жан-жақты ақпаратсызақ қарастыруға мүмкіндік береді.

Сақталу заңдарының жалпы сипаты оларды тек қозғалыстың теңдеуі белгілі болып, бірақ олардың шешуі белгісіз болғанда ғана емес, сонымен бірге қозғалыс теңдеуі белгісіз болғанда да қолдануға мүмкіндік береді. Нәтижесінде, қозғалыстың өте маңызды ерекшеліктерін күш әсері заңын білмей-ақ жиі анықтауға тура келеді.

Өте кең күштер класстары үшін қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралын жалпы түрде шығарып, нәтижесін физикалық шамалардың белгілі бір комбинацияларының сандық мәнінің тұрақтылығы ретінде қабылдау мүмкін болады. Сақталу заңы дегеніміздің өзі осы. Механикада сақталу заңдары математикалық тұрғыдан алғанда қозғалыс теңдеулерінің бірінші интегралдарына әкелінеді.

**Тұйықталған жүйе үшін импульстің сақталу заңы**. Егер сыртқы күштер жоқ болатын болса, материялық нүктелер жүйесі немесе материялық нүкте тұйықталған деп аталады. Сондықтан қозғалыс теңдеуінде

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \qquad (57)$$

күш $\vec{F} = 0$ және ол мына түрге енеді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \qquad (58)$$

Осы теңдеуді интегралдасақ, алатынымыз:

$$\vec{P} = const, \qquad (59)$$

оған қоса,

$$P_x = const, \quad P_y = const, \quad P_z = const \qquad (60)$$

Бұл теңдік импульстің сақталу заңын білдіреді: тұйықталған жүйе импульсі жүйе ішінде өтіп жатқан кез келген үрдістер кезінде өзгермейді. Бейрелятивистік жағдайда материялы нүктелер жүйесі үшін заң жүйенің массалар центрі бірқалыпты және түзу бағытта қозғалуда екенін бекітеді.

Материялық нүктелер жүйесі тұйықталмаған боп шығуы мүмкін, бірақ кейбір жағдайда сыртқы күштер тек белгілі бір бағыттарда ғана әрекет етеді де, ал қалғандарында жоқ болады. Айталық, мысалы *(x, y)* жазықтығына параллел бағыттарда күштер жоқ, яғни $F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z \neq 0$

Онда

$$P_x = const, \qquad P_y = const. \qquad (61)$$

Бұдан көретініміз – *(x, y)* жазықтығында жүйе импульсі өз мәнін сақтайды.

**Импульс моментінің сақталу заңы**. Бұл заң да импульстің сақталу заңы сияқты тек тұйықталған жүйелер үшін әділетті. Олар үшін сыртқы күштер моменті $\vec{M}$ нөлге тең, және моменттер теңдеуі мынадай:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \tag{62}$$

Бұл теңдеуді интегралдау арқылы алатынымыз:

$$\vec{L} = const \tag{63}$$

сонымен бірге

$$L_x = const, \quad L_y = const, \quad L_z = const \tag{64}$$

Импульс моментінің сақталу заңы мынаны білдіреді: тұйықталған жүйенің импульс моменті жүйе ішінде болып жатқан кез келген үрдістер кезінде өзгермейді.

Айталық, жүйе толығымен тұйықталмаған болуы да мүмкін, бірақ кейбір бағыттарға, мысалы, Z өсіне, күш моменті проекциясы нөлге тең. Демек, жүйені тұйықталған деп тек импульс моментінің Z-тік проекциясына ғана қатысты есептеуге болады:

$$L_z = const. \tag{65}$$

## Жұмыс және энергия. Механикадағы энергияның сақталу заңы. Релятивистік механикадағы сақталу заңдары

1. Күш жұмысы. Механикалық жүйенің кинетикалық энергиясы және оның жұмыспен байланысы
2. Потенциалды (консервативті) күштер. Өрістің потенциалдығының математикалық критерийі
3. Сыртқы күш өрісіндегі материялық нүктенің потенциалды энергиясы және оның күшпен байланысы. Механикадағы энергияның сақталу заңы. Потенциалды энергияны нормалау.
4. Толық энергия және тыныштық энергиясы. Кинетикалық энергия. Масса мен энергия арасындағы арақатынас. Бөлшектің толық энергиясының импульс арқылы бейнеленуі.

Жұмыс пен жылдамдық өзгерісінің арасындағы байланысты табайық. Әуелі күш *X* өсі бойымен әсер ететін және қозғалыс осы өс бойында болатын бірөлшемді жағдайда қарастырайық. Нүкте қозғалысының теңдеуін шеше отырып (бұл теңдеудің екі бөлімін де $v_x$-ке көбейтіп)

$$m_o \frac{dv_x}{dt} = F_x \tag{66}$$

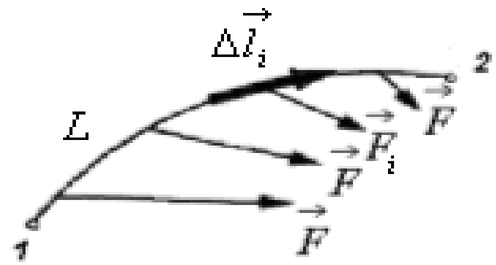
біржолата мынаны табамыз:

$$\frac{m_o v_{x2}{}^2}{2} - \frac{m_o v_{x1}{}^2}{2} = \int_{x1}^{x2} F_x dx \tag{67}$$

мұндағы $m_o$ – нүктенің массасы, ал $\frac{m_o v_x{}^2}{2}$ – **нүктенің кинетикалық энергиясы.**

Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының оның екі түрлі орналасуы арасындағы орын ауыстыруы кезіндегі өзгеруі осы жердегі күштің атқарған жұмысына тең.

Нүкте алғашқыдағыдай түзу бойымен емес ерікті траекториямен қозғалсын делік (7 сурет).




7 Сурет.

Қозғалыс траекториясын $\Delta\vec{l}_i$ қысқа кесінділерге бөлейік. Осы кесіндідегі элементарлық жұмыс:

$$\Delta A_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = F_i \Delta l_i \cos(\vec{F}_i, \Delta\vec{l}_i) \qquad (68)$$

Кесінділердің ұзындықтарын ($\Delta\vec{l}_i$) нөлге қарай, ал олардың санын – шексіздікке ұмталдыра отырып, ерікті траектория бойынша орын ауыстыру кезіндегі **күштің жұмысын** аламыз:

$$A = \lim_{\Delta\vec{l}_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{l}_i = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad (69)$$

Осы теңдеудің оң жақ бөлігіндегі интеграл – *L* сызығының бойымен, 1 және 2 нүктелердің арасында алынған – қисықсызықты интеграл деп аталады.

Енді қозғалыстың жалпы теңдеуін қарастырайық:

$$m_o \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \qquad (70)$$

Бұл теңдеуді шеше отырып (теңдеудің екі бөлігін де $\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ -ға көбейтіп) мынаны табамыз:

$$\frac{m_o {v_2}^2}{2} - \frac{m_o {v_1}^2}{2} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad (71)$$

Көп жағдайда күштің қасиеттері соншалықты, тіпті (71)-дегі оң жақ бөлім (энергияның өлшемділігіне ие шама) механика аясында анық мәнге ие болады.

**Потенциалды (консервативті) күштер**. Күштерді олардың қасиеттері бойынша екі класқа бөлуге болады. Бірінші класс күштері үшін, екі нүкте арасында орын ауыстыру барысындағы жұмыс осы орын ауыстыру кезіндегі жүрілген жолға тәуелді емес, ал екінші класс күштері үшін – тәуелді.

Жұмысы траекторияның бастапқы және соңғы нүктелеріне тәуелді, бірақ оның түріне тәуелсіз болатын күштер потенциалды (консервативті) деп аталады . Бұл күштерге тартылыс күштері жатады.

"Потенциалды күштер" деген атаудың орнына көбінесе "потенциалды өрістер" делінеді. Күш өрісі деп нүктелерінде қарастырылып отырған күштер әрекет ететін кеңістік аясын айтады.
Потенциалды өріс дегеніміз, ондағы жұмыс, яғни интеграл:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} \qquad (72)$$

1 және 2 нүктелердің орналасу орындарына ғана тәуелді болып, бірақ осы нүктелерді қосатын жолдың түріне тәуелсіз болса. Бұл анықтамаға басқаша математикалық пішін беруге де болады:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (73)$$

және сөзбен анықтама формасында айтсақ: 1) өріс потенциалды деп айтылады, егер де өрістің күш жұмысы кез келген тұйық контур бойынша нөлге тең болса; және критерий формасында айтсақ: 2) өріс потенциалды болу үшін, өрістің күш жұмысы кез келген контур бойынша нөлге тең болуы қажет және жеткілікті.

Енді әлдебір **математикалық теореманы** дәлелдеусіз түрде келтіре отырып пайдалансақ: егер $F_x$ , $F_y$ , $F_z$ потенциалды күштің проекциялары болған болса онда мынадай функцияның $E_n(x, y, z)$ бар болғаны, және оның көмегінің арқасында осы проекциялар мынандай формулалармен бейнеленеді:

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}. \qquad (74)$$

$E_n$ функциясының көмегі арқылы (71) теңдіктің оң жақ бөлігіндегі күштің жұмысын есептеп шығаруга болады. Ол үшін бірінші мына теңдікті есептеп шығарамыз:

$$\vec{F} \cdot d\vec{l} = -dE_n$$

Теңдектен интеграл алсақ 1-ші нүктеден 2 нүктеге орын ауыстыру кезіндегі жұмысты аламыз:

$$\int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_{(1)}^{(2)} dE_n = -\left(E_{n2} - E_{n1}\right) \qquad (75)$$

мұнда $E_{n1}$ мен $E_{n2}$ – $E_n$ функциясының 1 және 2 нүктелердегі мәндері. (71) орнына (75) ескерсек, мынаған ие боламыз:

$$\frac{m_o v_2^{\ 2}}{2} - \frac{m_o v_1^{\ 2}}{2} = -\left(E_{n2} - E_{n1}\right) \qquad (76)$$

Осылайша, 1 және 2 нүктелердің арасындағы кинетикалық энергия $E_n$ шамасы дәл сондай нүктелердің арасында орын ауыстыру кезінде теріс белгімен өзгергеніндей мәнге өзгерді. Теңдікті мынадай түрде қайта жазған ыңғайлы:

$$\frac{m_o {v_2}^2}{2} + E_{n2} = \frac{m_o {v_1}^2}{2} + E_{n1} \qquad (77)$$

Бұдан шығатыны, қозғалыс кезіндегі кинетикалық энергия мен $E_n$ шамасының қосындысы тұрақты болып қалады:

$$\frac{m_o v^2}{2} + E_n = const \qquad (78)$$

$E_n$ шамасы материялы нүктенің **потенциалды энергиясы**, ал теңдік – **энергияның сақталу заңы** деп аталады.

Енді потенциалдық энергияның күшпен байланысын көрсетуге болады. Күшті вектор ретінде жазайық:

$$\vec{F} = \vec{i}_x F_x + \vec{i}_y F_y + \vec{i}_z F_z \qquad (79)$$

мұнда $\vec{i}_x$, $\vec{i}_y$, $\vec{i}_z$ – координаттық остер бойындағы бірлік векторлар.

Потенциалды күштің проекцияларын

$$F_x = -\frac{\partial E_n}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial E_n}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial E_n}{\partial z}, \qquad (80)$$

ескере отырып табатынымыз: (81)

Набла операторын пайдалансақ

$$\nabla = \vec{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{i}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

біржолата алатынымыз

$$\vec{F} = -\nabla E_n = -grad\, E_n \qquad (82)$$

Потенциалды энергияны таңдаудағы еркінділікті пайдалана отырып, оны кеңістіктің қайсыбір нүктесіндегі кез келген алдын ала берілген мәнге тең етіп алуға болады. Сонда барлық қалған нүктелердегі оның мәні сөз жоқ фиксацияланған болып бекітіледі. Потенциалды энергияға сөзсіздікті берудің бұл процедурасы **нормалау** деп аталады.

**Релятивистік жағдайдағы энергияның сақталу заңы**:

$$\frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + E_n = const \qquad (83)$$

$E_n$ потенциалды энергияның бейрелятивистік теориядағыдай мәні тура сол, ал

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (84)$$

шамасы дененің **толық энергиясы** деп аталады.

Дене тыныштық жағдайында тұрған кезде ($v=0$), ол

$$E_0 = m_o c^2 \qquad (85)$$

энергиясына ие, ол **тыныштық энергиясы** деп аталады.

Ерікті жылдамдықпен қозғалушы дененің $E_k$ **кинетикалық энергиясы** мына формуламен беріледі:

$$E_k = E - m_o c^2 = m_o c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \qquad (86)$$

Релятивистік массаға арналған

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (87)$$

формуланы есте ұстай отырып толық энергияға арналған теңдікті мына түрде жазамыз:

$$E=mc^2. \qquad (88)$$

Бұл теңдік – физиканың ең іргелі заңдарының бірі болып табылады және масса мен энергия арасындағы арақатынасты береді, оны Эйнштейн анықтаған.

Релятивистік импульске арналған

$$\vec{p} = \frac{m_o\vec{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (89)$$

теңдеуден және толық энергия теңдеуінен

$$E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad (90)$$

*v* жылдамдығын алып тастасақ, *p* импульс арқылы бөлшектің толық энергиясының бейнесін аламыз:

$$E = c\sqrt{p^2 + m_o{}^2 c^2} \qquad (91)$$